ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N.B. — *Chacune des parties* II, III, IV *peut être traitée indépendamment des questions posées antérieurement, en admettant, si nécessaire, les résultats qui y sont énoncés.*

I

a. f étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |\sin x|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos 2nt \, dt = \frac{2}{1 - 4n^2}$$

b. Démontrer que, pour tout réel k vérifiant $|k| \in \left]\frac{2}{\pi}, 1\right[$, l'équation $f(x) = kx$ a une seule solution α autre que 0 dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Dans l'hypothèse où $k \in \left]\frac{2}{\pi}, 1\right[$ prouver que, pour $x_0 \in \left]\text{arc cos } k, \frac{\pi}{2}\right[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \sin x_n$$

est convergente. Quelle est sa limite?

c. Posant $\frac{180}{\pi} x_n = \theta_n$, et calculant les premiers termes de la suite (θ_n) pour $\theta_0 = 64$, puis pour $\theta_0 = 65$, trouver, pour $k = 0{,}8$, une valeur approchée de α avec une erreur inférieure à 10^{-3}.

d. De l'étude du rapport :

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha}$$

déduire la nature de la série de terme général :

$$u_n = x_n - \alpha$$

e. x désignant un réel quelconque, $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite définie par :

$$P_1(x) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \cos 2nx.$$

On désignera par $\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples entiers de π.

De l'étude, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, du produit $\sin x . P_n(x)$, déduire que :

$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z}, \qquad \frac{1}{2} + \cos 2x + \ldots + \cos 2(n-1)x = \frac{1}{2} \frac{\sin (2n-1)x}{\sin x}$$

La fonction $P_n : x \longmapsto P_n(x)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Tournez la page S. V. P.

f. Pour tout entier $n \geqslant 1$, Q_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q_n(x) = \frac{P_1(x) + \ldots + P_n(x)}{n}$$

Étudiant, pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$, le produit $\sin^2 x\, Q_n(x)$, montrer que :

$$\forall\, x \notin \pi\mathbb{Z}, \qquad Q_n(x) = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2$$

Du calcul de $Q_n(0)$, déduire la valeur de la somme :

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II

a. n étant un entier naturel non nul, on désigne par φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \neq 1\,, \qquad \varphi_n(x) = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}\,; \qquad \varphi_n(1) = n.$$

Montrer que φ_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi'_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Vérifier que φ_n est une fonction polynôme que l'on explicitera. Déduire alors des calculs précédents une expression de la somme :

$$1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$$

sous forme de fraction rationnelle, pour $x \neq 1$.

c. Exprimer en fonction de n, a, $\varphi_n(a)$ et $\varphi'_n\left(\frac{1}{a}\right)$, les sommes :

$$U_n = a + \ldots + a^n \qquad \text{et } V_n = \frac{1}{n}\left(U_1 + \ldots + U_n\right)$$

Comparer alors, lorsqu'elles existent, les limites des suites (U_n) et (V_n).

d. On se propose de montrer que, si une suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ est convergente et a pour limite U, la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{n}\left(U_1 + \ldots + U_n\right)$$

est aussi convergente et a même limite.

1. Montrer que, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels vérifiant $n > p \geqslant 1$, on a :

$$V_n - U = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} U_k - \frac{p}{n}U + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{n}\left(U_k - U\right).$$

2. Dans l'hypothèse où $\lim_{n\to\infty} U_n = U$, démontrer l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un entier naturel p_ε vérifiant la proposition suivante :

$$n > p > p_\varepsilon \Rightarrow |V_n - U| < \frac{|U_1 + \ldots + U_n|}{n} + \frac{p}{n}|U| + \varepsilon.$$

En déduire la limite de la suite (V_n).

.../...

III

On suppose que la série de terme général u_n ($n \in \mathbb{N}^*$) vérifie la proposition suivante :

$$\exists\, B > 0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n| < \frac{B}{n}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_1 + \ldots + u_n = U_n, \text{ et } \frac{1}{n}(U_1 + \ldots + U_n) = V_n$$

et l'on se propose de démontrer que si la suite (V_n) est convergente et a pour limite V, la série de terme général u_n est convergente et a pour somme V.

a. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, la somme $U_{n+1} + \ldots + U_{n+p}$ en fonction de V_n et V_{n+p}. Montrer alors que :

$$p\,U_{n+p} = (n+p)\,V_{n+p} - n\,V_n + u_{n+2} + 2\,u_{n+3} + \ldots + (p-1)\,u_{n+p}.$$

b. Vérifier que :

$$|u_{n+2} + 2\,u_{n+3} + \ldots + (p-1)\,u_{n+p}| < \frac{Bp^2}{2n}.$$

c. Posant alors $n + p = m$, déduire de ce qui précède que, quels que soient les entiers m et n vérifiant $m > n \geqslant 1$, on a :

$$|U_m - V| \leqslant \frac{m}{m-n}|V_m - V| + \frac{n}{m-n}|V_n - V| + \frac{B}{2}\frac{m-n}{n}.$$

d. De l'hypothèse de convergence de la suite (V_n) vers V, déduire l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$ d'un entier $N_\varepsilon > 0$ tel que l'on ait :

$$m > n > N_\varepsilon \Rightarrow |U_m - V| < \left(1 + \frac{2n}{m-n}\right)\varepsilon^2 + B\,\frac{m-n}{2n}.$$

e. Étant donné un réel $\varepsilon \in]0, 1[$, montrer que, pour tout entier $m > \frac{6}{\varepsilon}$, il existe un entier naturel $n < m$ vérifiant la double inégalité :

$$\varepsilon < \frac{m-n}{n} < 2\varepsilon.$$

Démontrer alors que :

$$m > \sup\left(\frac{6}{\varepsilon}, (1+2\varepsilon)\,N_\varepsilon\right) \Rightarrow |U_m - V| < (3+B)\,\varepsilon.$$

IV

a. f étant une fonction définie et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, paire, soient (a_n) et (b_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos 2nt\,dt\,; \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin 2nt\,dt.$$

Tournez la page S. V. P.

Donner la valeur de b_n pour tout n, et en déduire que :

$$a_n \cos 2n\,x = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos 2n\,(t - x)\,dt.$$

b. Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère la suite numérique $(f_n(x))$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2}, \text{ et } \forall n > 1, f_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos 2x + \ldots + a_{n-1} \cos 2(n-1)x.$$

Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, P_n(t - x)\,dt,$$

où P_n est la fonction étudiée dans la partie I.*e*.

c. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n}\left(f_1(x) + \ldots + f_n(x)\right) = g_n(x)$.

Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\, Q_n(t - x)\,dt,$$

où Q_n est la fonction définie dans la partie I.*f*.

d. Appliquant les résultats précédents au cas où $f(x) = 1$ pour tout x, calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

e. Dans le cas particulier où $f(x) = |\sin x|$ pour tout x, donner, en utilisant le résultat du I.*a.*, les valeurs des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Montrer alors que l'on a, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\,x = \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\, P_n(t - x)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\, Q_n(t - x)\,dt.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail